3. Übung Komplexe Analysis II

1. Aufgabe
Es sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen und $a \in U$ ein Punkt. Weiter sei $\delta_a\colon C_0^\infty(U) \to \mathbb{C}$ definiert durch $\delta_a(\varphi) = \varphi(a)$. Zeigen Sie, dass $\delta_a \in \mathcal{D}'(U)$ gilt. Zeigen Sie außerdem, dass es kein $f \in L^1(U, \mathrm{loc})$ gibt mit $\delta_a(\varphi) = \int_U f\varphi dV$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(U)$.

2. Aufgabe
Es sei $f\colon C_0^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ definiert durch $f(\varphi) = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \left(\frac{\partial^k}{\partial x^k}\varphi\right)(k)$.

(a) Zeigen Sie, dass f wohldefiniert ist und $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ gilt.

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ definiert durch $f_n = \sum_{k=0}^n \frac{\partial^k}{\partial x^k}\delta_k$ mit δ_k wie in Aufgabe 1.

(b) Zeigen Sie: $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

3. Aufgabe
Es sei $h, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = 1$ für $x \geq 0$, $h(x) = 0$ für $x < 0$ und $g(x) = \frac{1}{2}(|x| + x)$. Zeigen Sie: $g, h \in L^1(\mathbb{R}, \mathrm{loc})$ mit $\frac{\partial}{\partial x} g = h$ und $\frac{\partial^2}{\partial x^2} g = \delta_0$ in Distributionen. (Hier ist δ_0 wie in Aufgabe 1.)

4. Aufgabe
Es sei $U \subset\subset \mathbb{C}$ offen mit C^∞-glattem Rand bU und sei $f \in C_0^\infty(U)$ eine Funktion.

(a) Benutzen Sie die Identität $\frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z} = dx \wedge dy$ mit $z = x + iy$ und den Satz von Stokes, um zu zeigen, dass

$$\int_{bU} f(z)dz = 2i \int_U \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f\right) dV$$

gilt.

Man betrachte $P, Q\colon C_0^\infty(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ mit $P(\varphi) = \int_{\{|z|^2<1\}} \varphi dV$ und $Q(\varphi) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\theta})e^{i\theta} d\theta$.

(b) Zeigen Sie: $P, Q \in \mathcal{D}'(\mathbb{C})$.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} P = -Q$ in Distributionen gilt.

Es sei nun $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{2\pi}\ln(|z|)$, für $z \neq 0$.

(d) Zeigen Sie, dass $f \in L^1(\mathbb{C}, \mathrm{loc})$ gilt mit $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f = \delta_0$ in Distributionen. (*Hinweis*: Wählen Sie $R > 0$ hinreichend groß und verwenden Sie (a) mit $U = U_\varepsilon = \{\varepsilon < |z| < R\}$, $\varepsilon > 0$ und $\varepsilon \to 0$. Benutzen Sie außerdem $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$).

5. Aufgabe
Es sei $U = (0,1) \subset \mathbb{R}$. Für $f \in C_0^\infty(U)$ definiere man $f_n\colon U \to \mathbb{C}$, $f_n(x) = (\frac{1}{n}\sin(n^2x)+1)f(x)$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset W^1(U)$ mit $f_n \to f$ in der $L^2(U)$-Norm für $n \to \infty$.

(b) Zeigen Sie, dass $\frac{\partial f_n}{\partial x}$ für $n \to \infty$ in $L^2(U)$ divergiert.

Gegeben sei $f \in L^2(U, \mathrm{loc})$ mit kompaktem Träger in U und $\frac{\partial}{\partial x} f \in L^2(U, \mathrm{loc})$ in Distributionen.

(c) Zeigen Sie, dass $\frac{\partial}{\partial x} f$ kompakten Träger in U hat und folgern Sie $f \in W^1(U)$.

(d) Zeigen Sie, dass es eine Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(U)$ gibt mit $f_n \to f$ in der $W^1(U)$-Norm für $n \to \infty$ (d.h. $f_n \to f$ und $\frac{\partial f_n}{\partial x} \to \frac{\partial f}{\partial x}$ in der $L^2(U)$-Norm).

(e) Gilt die Aussage in (d) auch für $f \equiv 1$?

6. Aufgabe
Es sei $T\colon \mathrm{Dom}(T) \subset H_1 \to H_2$ ein dicht definierter Operator zwischen zwei Hilberträumen. Zeigen Sie, dass der adjungierte Operator $T^*\colon \mathrm{Dom}(T^*) \subset H_2 \to H_1$ abgeschlossen ist.

7. Aufgabe
Es sei $T\colon \mathrm{Dom}(T) \subset H_1 \to H_2$ ein abgeschlossener dicht definierter Operator zwischen zwei Hilberträumen und $F \subset H_2$ ein abgeschlossener Unterraum mit $\mathrm{ran}(T) \subset F$. Beweisen sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) $\mathrm{ran}(T) = F$,

(ii) $\exists C > 0\ \forall f \in F \cap \mathrm{Dom}(T^*) : \|f\|_{H_2} \leq C\|T^*f\|_{H_1}$.

8. Aufgabe
Es sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen und $\varphi \in C^\infty(U, \mathbb{R})$. Für $q \geq 0$ betrachte man den Hilbertraum $H_q = L^2_q(U, \varphi)$ wie in der Vorlesung definiert und $T_q\colon \mathrm{Dom}(T_q) \subset H_q \to H_{q+1}$ mit

$$\mathrm{Dom}(T_q) = \{f \in H_q \mid \overline{\partial} f \in H_{q+1} \text{ in Distributionen}\}$$

und $T_q f = \overline{\partial} f$ in Distributionen. Dabei sind $\overline{\partial}\colon \mathcal{D}_q(U) \to \mathcal{D}_{q+1}(U)$ und $\nu_\varphi\colon \mathcal{D}_{q+1}(U) \to \mathcal{D}_q(U)$ definiert durch

$$\overline{\partial} = \sum_{j=1}^n d\overline{z}_j \wedge \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} \quad \text{und} \quad \nu_\varphi = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} \lrcorner \left(-\frac{\partial}{\partial z_j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z_j}\right)$$

und für $f \in H_q$ und $g \in H_{q+1}$ gilt $\overline{\partial} f = g$ in Distributionen genau dann wenn

$$\int_U \langle g, \alpha \rangle dV = \int_U \langle f, \nu_0 \alpha \rangle dV$$

für alle $\alpha \in \mathcal{D}_{q+1}(U)$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass T_q ein abgeschlossener, dicht definierter Operator ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\operatorname{ran}(T_q) \subset \operatorname{Dom}(T_{q+1})$ mit $T_{q+1} \circ T_q f = 0$ für alle $f \in \operatorname{Dom}(T_q)$. Folgern Sie $\overline{\operatorname{ran}(T_q)} \subset \ker T_{q+1}$.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst $\nu_0 \circ \nu_0 \alpha = 0$ für alle $\alpha \in \mathcal{D}_q(U)$, $q \geq 0$.

Es sei $T_q^* \colon \operatorname{Dom}(T_q^*) \subset H_{q+1} \to H_q$ der adjungierte Operator.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathcal{D}_{q+1}(U) \subset \operatorname{Dom}(T_q^*)$ gilt mit $T^*\alpha = \nu_\varphi \alpha$ für alle $\alpha \in \mathcal{D}_{q+1}(U)$.

(d) Es sei $g \in \operatorname{Dom}(T_q^*)$. Zeigen Sie: $T_q^* g = \nu_\varphi g$ in Distributionen.

(e) Es sei $g \in \overline{\operatorname{ran}(T_{q+1}^*)}$. Zeigen Sie: $g \in \operatorname{Dom}(T_q^*)$ mit $T_q^* g = 0$.

9. Aufgabe
Es sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen, $\varphi \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ und T_q bzw. T_q^* wie in Aufgabe 8.

(a) Es sei $g \in \Omega^{0,1}(U)$ und $u \in L^2(U, \mathrm{loc})$ mit $\overline{\partial} u = g$ in Distributionen. Zeigen Sie, dass $u \in \Omega^{0,0}(U) = C^\infty(U)$ gilt.

(b) Folgern Sie $\ker(T_0) \subset C^\infty(U)$ und $\ker(T_{n-1}^*) \subset \Omega^{0,n}(U) \simeq C^\infty(U)$.

Es sei nun $n = 2$. $q = 1$, $U \subset \mathbb{C}^2$ ein Polyzylinder mit Radius 1 um 0 und $\varphi \equiv 0$.

(c) Es sei

$$f \colon U \to \mathbb{C} \text{ mit } f(z) = \begin{cases} z_2 & , \text{ für } \operatorname{Re}(z_1) \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} . \end{cases}$$

Zeigen Sie $f \in L^2(U)$, $f \notin W^1(U, \mathrm{loc})$ und $f d\overline{z}_1 \in \operatorname{Dom}(T_1)$ und berechnen Sie $T_1(f d\overline{z}_1)$.

Sei $g \in \Omega^{0,2}(U)$ definiert durch $g(z) = z_1 z_2 d\overline{z}_1 \wedge d\overline{z}_2$.

(d) Finden Sie $u \in \Omega^{0,1}(U) \cap L_1^2(U, 0)$ mit $\overline{\partial} u = g$.

(e) Zeigen Sie, dass es $\tilde{u} \in \operatorname{Dom}(T_1)$ gibt mit $T_1(\tilde{u}) = g$ und $\tilde{u} \notin \Omega^{0,1}(U)$.

(f) Beschreiben Sie mit eigenen Worten den Unterschied zwischen dem Fall $q = 0$ und $q = 1$ im Bezug auf die Regularität der Lösungen der Gleichung $\overline{\partial} u = g$. Gehen Sie dabei speziell auf den Fall $H^{0,1}(U) = H^{0,2}(U) = 0$ ein.

10. Aufgabe
Es sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen und pseudoconvex, $\varphi \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ und $T_q \colon \operatorname{Dom}(T_q) \subset H_q \to H_{q+1}$ wie in Aufgabe 8.

(a) Ist $C > 0$ eine Konstante mit $\operatorname{Lev}(\varphi)(z, X) \geq C|X|^2$ für alle $z \in U$, $X \in \mathbb{C}^n$, so ist $\operatorname{ran}(T_q)$ abgeschlossen.

(b) Ist $\varphi \equiv 0$ und $U \subset\subset \mathbb{C}^n$ relativ kompakt, so ist $\operatorname{ran}(T_q)$ abgeschlossen.

11. Aufgabe

Es sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Holomorphiegebiet. Zeigen Sie, $b_r(G) = 0$ für alle $r > n$, wobei $b_r(G)$ die r-te Bettizahl von G ist.

12. Aufgabe

Es sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen und $\varphi \in C^\infty(U, \mathbb{R})$, $\varphi(z) = \ln(1 + |z|^2)$.

(a) Zeigen Sie: $\operatorname{Lev}(\varphi)(z, X) \geq (1 + |z|^2)^{-2}|X|^2$ für alle $z \in U$ und $X \in \mathbb{C}^n$.

Sei nun U zusätzlich pseudokonvex, $\psi \in \operatorname{PSH}(U)$ und $g \in L^2_{q+1}(U, \mathrm{loc})$ mit $\overline{\partial} g = 0$ in Distributionen.

(b) Zeigen Sie: Gilt $C := \int_U |g|^2 e^{-\psi} dV < \infty$, so gibt es $u \in L^2_q(U, \mathrm{loc})$ mit $\overline{\partial} u = g$ in Distributionen und

$$\int_U \frac{|u|^2 e^{-\psi}}{(1 + |z|^2)^2} dV \leq C.$$